Exercices

Topologies

Exercice 1. Montrer que :

1. Si $T_k \underset{k\to\infty}{\to} T$, $\mathcal{D}'(\Omega)$, alors, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on a $fT_k \underset{k\to\infty}{\to} fT$, $\mathcal{D}'(\Omega)$.
2. Si $f_k \underset{k\to\infty}{\to} f$, $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, alors, $\forall T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on a $f_kT \underset{k\to\infty}{\to} fT$, $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exercice 2.

1. On pose $f(x) = \dfrac{\sin(kx)}{x}$. Montrer que $T_f \underset{k\to\infty}{\to} \pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. On pose $g_k(x) = \displaystyle\int_{-k}^{k} e^{ixy}dy$. En déduire que

$$\lim_{k\to\infty} T_{g_k} = 2\pi\delta_0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Dérivation, multiplication et équations algébriques

Exercice 3.

1. Montrer que $x\ \mathrm{VP}\dfrac{1}{x} = 1$ (E).
2. En déduire toutes les solutions de $xT = 1$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
3. *Contre-exemple de Schwartz :* Multiplier de chaque côté de (E) par δ_0, et montrer qu'il n'est pas possible de définir correctement la multiplication de deux distributions.

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Calculer $(T_f)'$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = \mathrm{sign}(x)$
2. $f(x) = |x|$
3. $f(x) = E(x)$ (partie entière)
4. $f(x) = \log|x|$.

Exercice 5. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$a)\ xT = \delta_0, \qquad\qquad b)\ x^2T = 0.$$

Exercice 6.
Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, radiale (i.e. $f(x) = f\|x\|$).

1. Montrer que
$$\Delta f = \frac{d^2f}{dr^2} + \frac{n-1}{r}\frac{df}{dr}.$$
2. En déduire que les fonctions harmoniques radiales de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ sont données par
$$\begin{cases} f(r) = A\log(r) + B, & n = 2, \\ f(r) = \dfrac{A}{r^{n-2}} + B, & n = 3. \end{cases}$$
3. Montrer que $\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right) = -4\pi\delta, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.
4. Montrer que $\Delta\left(\log(r)\right) = 2\pi\delta, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 7. Approximation de distributions par des fonctions.

1. Donner deux suites de fonctions f_n et g_n telles que
$$f_n \underset{n\to\infty}{\to} \delta_0, \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \qquad g_n \underset{n\to\infty}{\to} \delta_0', \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
On donnera une preuve de la convergence.
2. Construire une suite de fonctions h_n telle que
$$h_n \underset{n\to\infty}{\to} \delta_0'', \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
On donnera une preuve de la convergence.

Exercice 8.

1. Montrer que les éléments φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale nulle sont les éléments tels qu'il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\psi' = \varphi$.
2. On fixe $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ d'intégrale 1. En déduire que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $(\lambda_\varphi, \psi) \in (\mathbb{R} \times \mathcal{D}(\mathbb{R}))$ tel que $\varphi = \lambda_\varphi\theta + \psi'$.
3. En déduire qu'une distribution de dérivée nulle est constante.

Exercice 9.

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que f est nulle sur le support de T. A t-on $fT = 0$?
2. On définit $f_a(x) = \dfrac{x}{a^2 + x^2}$. Vers quoi converge T_{f_a} quand $a \to 0$, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?

Exercice 10. Equations algébriques.
Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(0) = 1$.

1. Montrer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, il existe $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que
$$\varphi(x) = \varphi(0)\theta(x) + x\Psi(x).$$
Soit $\theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\theta(a) = 1$. En déduire que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que
$$\varphi(x) = \varphi(a)\theta(x) + (x-a)\Psi(x).$$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Trouver toutes les distributions T qui satisfont
$$(x-a)T = 0.$$
3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver toutes les distributions T qui satisfont
$$(x-b)(x-a)T = 0.$$

Exercice 11. Les formules de Plemelj-Sokhotski. Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Plemelj-Sokhotski suivante
$$\frac{1}{x - i0} = V.P.\frac{1}{x} + i\pi\delta, \qquad \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \tag{1}$$
où on définit
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle \frac{1}{x - i0}, \varphi \rangle := \lim_{\epsilon \to 0^+} \langle \frac{1}{x - i\epsilon}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x + i\epsilon} dx.$$
Cette formule est utilisée pour calculer des intégrales intervenant en physique quantique.

1. Montrer que la formule (1) est équivalente à
$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \delta, & \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \\ \displaystyle\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = V.P.\frac{1}{x}, & \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{2}$$
2. Démontrer la deuxième égalité de (2). Indication : On écrira $\varphi(x) = \varphi(0) + (\varphi(x) - \varphi(0))$.
3. Montrer que
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{Supp}(\varphi) \subset [-a, a], \quad \langle V.P.\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx.$$
4. Montrer que
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ telle que } \mathrm{Supp}(\varphi) \subset [-a, a], \quad \langle \frac{x}{x^2 + \epsilon}, \varphi \rangle = \int_{-a}^{a} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx,$$
et en déduire la première ligne de (2).

Produit tensoriel

Exercice 12. Soit $H_2(x,y) = H(x)H(y)$. Calculer au sens des dsitributions $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} T_{H_2}$.

Exercice 13. Calculer $\delta'^x \otimes \delta^y$ et $\delta'^x \otimes \delta'^y$.

Produit de convolution

Exercice 14. Calculer $T_H * \delta'$, puis comparer $(T_1 * \delta') * T_H$ et $T_1 * (\delta' * T_H)$. Conclure.

Exercice 15. Calculer $T_1 * T$, si cela a un sens. Traiter en particulier le cas $T = T_f$, $f \in L^1_{loc}$.

Exercice 16. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^+)$ (son support est dans $[0, +\infty)$). Montrer que $T_H * T$ est une primitive de T.

Exercice 17. Calculer en dimension 1

$$(\delta_0 - \delta_1) * \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n.$$

Exercice 18. Montrer que pour $n \geq 1$ on a

$$H^{*(n)} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} H.$$

Exercice 19.

1. On note H la fonction de Heaviside. Soient f et g dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Calculer $Hf * Hg$.
2. On note $h(x) = H(x)\cos(x)$ Montrer que $T_h * (\delta' + T_H) = \delta$.
   Soit a une fonction dérivable. On note $A(x) = \int_0^x a(t)dt$.
3. Déduire des deux questions précédentes qu'il existe une unique fonction g nulle pour pour $x \leq 0$ telle que
$$H(x) \int_0^x g(t)\cos(x-t)dt = H(x)a(x).$$
   Donner une expression de la solution g. On distinguera le cas $a(0) = 0$ et $a(0) \neq 0$.

Transformée de Fourier

Exercice 20. Calculer, si elle définie, la transformée de Fourier des distributions suivantes : δ_a, δ'_a T_1.

Exercice 21.

1. Soit $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$ pour $0 \leq x \leq 1$ et périodique de période 1. Vérifier que
$$f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{\mathbb{Z}^*} \frac{e^{2i\pi nx}}{2\pi^2 n^2}.$$

2. En déduire qu'au sens des distributions,

$$\sum_{\mathbb{Z}} e^{2i\pi nx} = \sum_{\mathbb{Z}} \delta_n.$$

Indice : on calculera de deux façons différentes $(T_f)''$.

3. Calculer, si elle définie, la transformée de Fourier du peigne de Dirac $W = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$.

Exercice 22.

1. Soit $p > 0$ un entier. Montrer que $T_p = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^p \delta_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Calculer $F(T_p)$.
2. Montrer que $\dfrac{1}{e^x + e^{-x}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En déduire que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^n \delta_n \notin \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Exercice 23.

1. Calculer, si elle définie, la transformée de Fourier de $VP\dfrac{1}{x}$.
2. On définit

$$\langle PF\left(\frac{1}{|x|}\right), \varphi\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|} dx + \int_{|x|\geq 1} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx.$$

Calculer $xpF(1/|x|)$ et en déduire si elle définie, la transformée de Fourier de $PF\dfrac{1}{|x|}$.

Exercice 24. Soit T une distribution solution de $x^p T = 0$, $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\operatorname{supp}(T) \subset \{0\}$. En déduire FT et donc T.

Exercice 25.

1. Calculer la transformée de Fourier associée à T_f où $f(x) = |x|$.
2. Calculer la transformée de Fourier de $PF\dfrac{1}{x^2}$. On définit $PF\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\left(VP\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)'$.