Ecole Centrale Marseille
Mathématiques
Introduction au transport optimal

Exercices

Exercice 1. On considère le coût $c(x,y) = |x-y|$. Dans chacun des cas, donner les solutions des problèmes de Monge et de Kantorovitch.

1. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3,$
2. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1,$
3. $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3.$

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x+1$, $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $S(x) = 2x$ et $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $Z(x) = 2-x$. On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1,2]}$. A-t-on $T\#\mu = \nu$? $S\#\mu = \nu$? $Z\#\mu = \nu$?

Exercice 3 (Non-unicité pour un coût convexe - Book shifting)**.** On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0,2]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1,3]}$ et le coût $c(x,y) = |x-y|$. Soit $T_1(x) = x+1$ et

$$T_2(x) = \begin{cases} x+2, \text{ si } x \in [0,1], \\ x, \text{ si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Montrer que T_1 et T_2 sont deux applications optimales.

Exercice 4 (Non existence d'une application de transport)**.**
On prend μ la mesure uniforme sur $[0,1]$ et ν la mesure uniforme sur $[-1,1]$. On considère le coût $c(x,y) = (x^2 - y^2)^2$.

1. Pour tout entier n on définit l'application

$$T_n(x) = \begin{cases} \quad 2x - \frac{k}{2n}, \quad \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est pair}, \\ \quad -2x + \frac{k+1}{2n}, \quad \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est impair}. \end{cases}$$

Monter que $T_n\#\mu = \nu$ et montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 c(x, T_n(x)) d\mu(x) = 0.$$

2. En déduire qu'il n'esxite pas d'application de transport qui soit optimale.

3. Construire un plan de transport optimal.

Exercice 5 (Transport quadratique et translation)**.**
On considère le coût $c(x,y) = (x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ Pour $a \in \mathbb{R}$, on définitit la translation $\tau_a(x) = x-a$. Soit f et g deux fonctions continues Le but est de montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) = \mathcal{T}c(f,g) + (b-a)^2 + 2(b-a)(m_g - m_f), \tag{1}$$

où

$$m_f = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx, \quad m_g = \int_{\mathbb{R}} xg(x)dx.$$

1. Soit T une application optimale qui envoie f sur g. On définit S par $S(x) = T(x-a)+b$. Montrer que $S\#(f \circ \tau_a) = g \circ \tau_b$.

2. Montrer que
$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f(\tau_a(x)))dx.$$

3. En déduire que
$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \mathcal{T}c(f,g) + (b-a)^2 + 2(b-a)(m_g - m_f),$$

4. De même montrer que
$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \geq \mathcal{T}c(f,g) + (b-a)^2 + 2(b-a)(m_g - m_f),$$
et en déduire (1)

5. En déduire que $\mathcal{T}_c(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[1,2]}) = 1$.

Exercice 6 (Non unicité des potentiels de Kantorovitch)**.** Montrer que si (φ, ψ) est une paire optimale de potentiel de Kantorovitch, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la paire $(\varphi + a, \psi - a)$ l'est aussi.

Exercice 7 (Potentiels de Kantorovitch)**.** Donner au moins une paire optimale de potentiel de Kantorovitch pour le book-shifting problem.

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on considère le coût $c(x,y) = \Psi(|x-y|)$ avec

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 - z, & 0 \leq z \leq 1, \\ z - 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

On considère les mesures $\mu = \dfrac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_2)$ et $\nu = \dfrac{1}{3}(\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$. Calculer le coût global du transport optimal entre μ et ν, et donner l'ensemble des plans de transport optimaux.

Exercice 9. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{Ax \leq b} c.x = \inf_{\substack{y \geq 0 \\ {}^tAy = c}} b.y$$

Notation: on dit que $x \geq 0$ si toutes ses composantes sont positives, et ${}^tA$ est la transposée de la matrice A. Pour $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x.c$ le produit scalaire entre c et x.
Indice: S'inspirer de la preuve de la dualité de Kantorovitch.

Exercice 10. On définit pour $x \in \mathbb{R}$

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Calculer $W_1(G_\sigma, \delta_0)$.

Exercice 11 (Interpolation de McCann)**.** Soient μ_0 et μ_1 des mesures à densité ρ_0 et ρ_1 par rapport à la mesure de Lebesgue. On considère le coût quadratique $c(x,y) = \|x-y\|_2^2$. Soit T l'application optimale de Monge.

1. Quel théorème garantit l'existence de T?
2. On suppose que T est inversible. Montrer que T^{-1} envoie μ_1 sur μ_0 de façon optimale.
3. On définit pour $t \in [0,1]$
$$T_t(x) = (1-t)x + tT(x),$$
et
$$\mu_t = T_t \# \mu_0.$$
Montrer que $(T^{-1})_{1-t}$ envoie μ_1 sur μ_t.
4. Montrer que
$$W_2(\mu_0, \mu_t) \leq tW_2(\mu_0, \mu_1).$$
5. Montrer que
$$W_2(\mu_1, \mu_t) \leq (1-t)W_2(\mu_0, \mu_1).$$
6. Calculer $W_2(\mu_0, \mu_t)$.
7. On prend
$$\rho_0(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1,0] \\ 1-x, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \qquad \rho_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [3,4], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$
Calculer la densité ρ_t de μ_t.